Alors $W \subseteq W'$ et $W' \subseteq W \Leftrightarrow W = W'$.

② ⇒ ①: On a $\vec{a} + W' = \vec{a}' + \underbrace{(\vec{a} - \vec{a}') + W}_{=W} = \vec{a}' + W = \vec{a}' + W'$

Co 4.31 Soit $L = \vec{a} + W$ une variété linéaire. Alors $L = \vec{a}' + W$ $\forall \vec{a}' \in L$

DÉMO Soit $\vec{a}' \in L$, alors $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{\omega}$ pour un certain $\vec{\omega} \in W$.

Alors $\vec{a}' + W \overset{4.29}{=} \vec{a} + \vec{\omega} + W = \vec{a} + W = L$

Pro 4.32 L'intersection d'une famille de variétés linéaires dans un espace vectoriel V est de nouveau une variété linéaire de V

Pour $L_i = \vec{a_i} + W_i$, $\bigcap_{i \in I} L_i$ est une var. linéaire.

DÉMO ① Si $\bigcap_{i \in I} L_i = \emptyset$, alors $\bigcap_{i \in I} L_i$ est une variété linéaire par définition (4.27)

② Supposons $\exists \vec{b} \in \bigcap_{i \in I} L_i$. Alors (4.31) $L_i = \vec{b} + W_i$ $\forall i \in I$.

Alors $\vec{z} \in \bigcap_{i \in I} L_i \Leftrightarrow \exists \vec{\omega_i} \in W_i$ tq $\vec{z} = \vec{b} + \vec{\omega_i}$, $\forall i \in I$

- Fixons $i_0 \in I$. Alors $\forall i \neq i_0$, $\vec{z} = \vec{a} + \vec{\omega_{i_0}} = \vec{a} + \vec{\omega_i}$ et donc $\vec{\omega_i} = \vec{\omega_{i_0}}$. $\Rightarrow \vec{\omega_{i_0}} \in \bigcap_{i \in I} W_i$ et donc $\vec{z} \in \vec{a} + \bigcap_{i \in I} W_i$
- On peut écrire $\bigcap_{i \in I} L_i = \vec{b} + \bigcap_{i \in I} W_i$ et donc $\bigcap_{i \in I} L_i$ est une variété linéaire car $\bigcap_{i \in I} W_i$ est un sous-espace vectoriel de V

Def 4.33 Soient $L = \vec{a} + W$ et $L' = \vec{a}' + W'$ deux variété linéaire. On dit que L est parallèle à L' ($L \parallel L'$) $\Leftrightarrow$ $W \subseteq W'$ ou $W' \subseteq W$

CH5 BASES ET DIMENSION

5.1 PARTIES GENERATRICES ET PARTIES LIBRES

Def 5.1 Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est une partie génératrice de V si tout vecteur de V est combili de vecteurs de A: $\mathrm{Vect}(A) = V$

Soit A une partie génératrice infinie de V, alors on peut écrire $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a_i}$ avec $\lambda_i \in K$ et $\vec{a_i} \in A$. Mais si A est infini, on

? écrit $\vec{v} = \sum_{\vec{a} \in A} \lambda_{\vec{a}} \vec{a}$ où $\lambda_{\vec{a}} = 0$ pour tout a sauf un nombre fini de terme.

Prop 5.4 Soit V un E.V. sur K, et

① Soit $A \subseteq V$ une partie génératrice de V et $\vec{v} \in V$. alors $A \cup \{\vec{v}\}$ est une partie génératrice de V.

② Soit $A \subseteq V$ une partie génératrice de V et $\vec{v} \in V$. Alors $A \setminus \{\vec{v}\}$ est une partie génératrice de $V \Leftrightarrow \vec{v} \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{\vec{v}\})$

DEMO

① $\mathrm{Vect}(A) = V \Rightarrow \forall \vec{w} \in V,\ \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$ où $\lambda_i \in K$ et $\vec{a}_i \in A$.

Comme $A \subset A \cup \{\vec{v}\}$, tout $\vec{w} \in V$ est aussi combili d'éléments de $A \cup \{\vec{v}\}$

② Si $A \setminus \{\vec{v}\}$ est génératrice, alors $V = \mathrm{Vect}(A \setminus \{\vec{v}\})$ et donc $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{\vec{v}\})$.

? Si $\vec{v} \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{\vec{v}\})$, alors $\vec{v} = \sum_{\substack{\vec{a} \in A \\ \vec{a} \neq \vec{v}}} \lambda_{\vec{a}} \vec{a}$ avec $\lambda_{\vec{a}} \in K$, $\vec{a} \in A$.

Donc $\forall \vec{w} \in V$, $V = \mathrm{Vect}(A)$, on a :

$$\vec{w} = \mu \vec{v} + \sum_{\vec{a} \in A} \mu_{\vec{a}} \vec{a} = \sum_{\substack{\vec{a} \in A \\ \vec{a} \neq \vec{v}}} (\mu \lambda_{\vec{a}} + \mu_{\vec{a}}) \vec{a}$$

Comme $\lambda_{\vec{a}}, \mu_{\vec{a}}$ sont presque zéro, cette somme est finie et on a $\vec{w} \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{\vec{v}\})$ et donc $A \setminus \{\vec{v}\}$ génératrice

Def 5.5. Un espace vectoriel V est de dimension finie ou finidimensionnel s'il admet une partie génératrice finie. Sinon, il est de dimension infinie ou infinidimensionnel

Prop. 5.6 Soit V un E.V. finidimensionnel. Alors tout ensemble G qui est générateur contient un sous-ensemble fini qui est toujours générateur.

DEMO

- V finidimensionnel $\Rightarrow \exists\ G' = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ qui est générateur, et G est aussi générateur. Alors, $\forall \vec{v}_i \in G'$, $\exists$ un # fini de $\vec{w}_{ij_i} \in G$ et de $\lambda_{ij_i} \in K$, avec $j_i = 1, \dots, m_i$ tq $\vec{v}_i = \sum_{j_i=1}^{m_i} \lambda_{ij_i} \vec{w}_{ij_i}$.
- Soit $H = \{\vec{w}_{ij_i} \mid j_i = 1, \dots, m_i,\ i = 1, \dots, n\} \subset G$. Alors H est fini et $G' \subseteq \mathrm{Vect}(H)$. Or, $V = \mathrm{Vect}(G') \subseteq \mathrm{Vect}(H)$. Et comme $\mathrm{Vect}(H) \subseteq V$, alors $\mathrm{Vect}(H) = V$, donc H est un sous ensemble fini de G qui est générateur.

⊙ Une partie génératrice peut donc contenir des éléments qui sont redondants.

Déf. 5.7. Un sous-ensemble $A \subseteq V$ est une partie libre de V si aucun vecteur de A n'est combili d'autres vecteurs de A. On dit que les vecteurs de A sont linéairement indépendants. $\vec{a} \notin \mathrm{Vect}\{A \setminus \{\vec{a}\}\}$

Pro 5.8. Une partie A de V est libre $\Leftrightarrow$ $\forall$ choix d'un $m \in \mathbb{N}$, de vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in A$ avec $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ si $i \neq j$ et de scalaire $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, on a $\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$

DÉMO

Montrons la négation : A n'est pas libre $\Leftrightarrow \exists \lambda_i$ tq $\lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$

($\Rightarrow$) • Comme A n'est pas libre, $\exists \vec{v} \in A$ tq $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\vec{v}_i \in A$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \underbrace{-\vec{v}}_{\neq 0} + \sum \lambda_i \vec{v}_i$ où $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ si $i \neq j$

($\Leftarrow$) • Supposons $\exists \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_i \vec{v}_i + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ où $\lambda_i \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \vec{v}_j \Leftrightarrow \vec{v}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \underbrace{\lambda_j \lambda_i^{-1}}_{\in \mathbb{K}} \vec{v}_j$

Alors $\vec{v}_i \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{\vec{v}_i\}) \Leftrightarrow A$ n'est pas libre

ex? **Pro 5.10** Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

1. Si $A \subseteq V$ est un ensemble linéairement dépendant, alors $A \cup \{\vec{v}\}$ est un ensemble linéairement dépendant $\forall \vec{v} \in V$.
2. Si $A \subseteq V$ est une partie libre, alors $A \setminus \{\vec{v}\}$ est une partie libre, $\forall \vec{v} \in V$.
3. $A \subseteq V$ est une partie libre $\Leftrightarrow$ chacun des éléments de $\mathrm{Vect}(A)$ s'écrit de manière unique comme combili de $\vec{a}_i \in A$.
4. Soit $A \subseteq V$ une partie libre et $\vec{v} \in V$. Alors $A \cup \{\vec{v}\}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}(A)$

DÉMO

(3) ($\Rightarrow$) • Supposons que $A \subseteq V$ est une partie libre, et que je peux écrire $\vec{v} = \sum_{\vec{a} \in A} \lambda_{\vec{a}} \vec{a} = \sum_{\vec{a} \in A} \mu_{\vec{a}} \vec{a}$. Regardons alors

$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \sum_{\vec{a} \in A} (\lambda_{\vec{a}} - \mu_{\vec{a}}) \vec{a}$ qui est une somme finie.

Comme A est libre, $\lambda_{\vec{a}} - \mu_{\vec{a}} = 0 \ \forall \vec{a} \in A$, $\Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \mu_{\vec{a}}$

($\Leftarrow$) • Supposons qu' $\exists \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ qu'on sait unique.

Or, $0 . \vec{v}_1 + \ldots + 0 . \vec{v}_n = \vec{0}$. Donc, $\lambda_i = 0$. Alors par (5.8), A est libre.

5.2. BASES

Def 5.12 Une base d'un espace vectoriel V est une partie génératrice et libre de V.

⊙ Dans $\mathbb{R}^n$, les vecteurs $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)$ forment une base canonique

Pro 5.14 Soit V un E.V. $\neq 0$. Un sous-ensemble $B \subseteq V$ est une base $\Leftrightarrow$ tout vecteur de V s'écrit de manière unique comme combili de vecteurs de B.

DEMO

B est une base $\Rightarrow$ B génératrice et partie libre.

Alors par (5.10③), comme $\text{Vect}(B) = V$, tout $\vec{v} \in V$ s'écrit comme une unique combili de $\vec{b_i}$, $\vec{b_i} \in B$.

Def 5.15 • Soit B une base d'un E.V. V et $\vec{v} \in V$. Les composantes de $\vec{v}$ dans la base B sont les coefficients scalaires dans la combili $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b_1} + \dots + \lambda_m \vec{b_m}$ où $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_m \in B$.

On les appelle les coordonnées de $\vec{v}$.

• Lorsque la base est finie, on écrit $\vec{v} := (v_1, \dots, v_n)$ pour indiquer que $v_1, \dots, v_n$ sont les coordonnées de $\vec{v}$. On peut aussi écrire :

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Def 5.17 Soit V un E.V. finidimensionnel et G une partie génératrice finie de V. Soit L une partie libre de V, $\subseteq G$. $\exists$ une base B tq

$$L \subseteq B \subseteq G$$

DEMO

Soit $L = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_\ell}\}$, $G = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_\ell}, \vec{v_{\ell+1}}, \dots, \vec{v_n}\}$

Essayons de construire la base à partir de L :

• Regardons $E_1 = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_\ell}, \vec{v_{\ell+1}}\}$. si $\text{Vect}(L) = \text{Vect}(E_1)$, on ne prend pas $\vec{v_{\ell+1}}$ dans la base. si $\text{Vect}(L) \subset \text{Vect}(E_1)$, on garde $\vec{v_{\ell+1}}$ dans la future base

• En suivant cette logique, on défini $B = L \cup \{\vec{v_{\ell+i}} \mid \text{Vect}(E_i) \neq \text{Vect}(E_{i-1}), i = 1, \dots, n-\ell\}$, alors B est une base, puisque $L \cup \{\vec{v_{\ell+i}}\}$ est libre $\Leftrightarrow E_i \neq E_0$ et B, par construction, satisfait $\text{Vect}(B) = \text{Vect}(G) = V$ ▨

Co 5.18 Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

DEMO Comme V est finidimensionnel, $\exists G$ finie. Soit $L = \phi$. Alors par (5.17), $\exists B$ tq $L \subseteq B \subseteq G$.

Co 5.19 Soit V un espace vectoriel finidimensionnel sur $\mathbb{K}$.

① Toute partie libre de V peut être complétée en une base

② Toute partie génératrice contient une base

③ Si $\# V$ est infini, alors V possède une infinité de base

DEMO ① Soit L partie libre de V et G (finie) partie génératrice. Alors $G' = L \cup G$ est aussi génératrice. Alors par (5.17) $\exists B$ tq $L \subseteq B \subseteq G'$

② Soit $L = \phi$. Alors par (5.17) $\exists B$ tq $\emptyset \subseteq B \subseteq G$.

③ $\forall \vec{v} \in V$ ($\neq \vec{0}$), $\{\vec{v}\}$ est partie libre. Alors par (5.19 ①) on peut complété chacune de ces parties libres en base. Comme $\# L = \infty$, $\# B = \infty$.

5.3 LA DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Le 5.20 Soient L une partie libre et G une partie génératrice d'un E.V. finidimentionnel de V. Alors $\# L \leq \# G$. En particulier, tout ensemble libre d'un E.V. finidimensionnel est fini.

DEMO $\boxed{1^{e} \text{ Cas}}$: • L et G sont des ensembles finis. Soit $L = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ et $G = \{\vec{\omega}_1, \dots, \vec{\omega}_m\}$. Alors on peux écrire $v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \vec{\omega}_j \quad \forall i = 1, \dots, n$.

• Regardons la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$. Si on veut montrer que $\# L \leq \# G$, il faut montrer que A possède moins de ligne que de colonne. Transformons A en forme échelonnée réduite :

$\underset{\text{inversible}}{E}\, A = A'$ echelonnée réduite.

• Supposons par l'absurde que $n > m \Rightarrow \exists$ au moins la dernière ligne $= 0$. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} e_{nk}\, a_{kj} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$.

• Regardons maintenant un combili des $v_i \in L$ avec les e_i :

$$\sum_{k=1}^{n} e_{nk}\, \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} e_{nk} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, \omega_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \overbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} e_{nk}\, a_{kj} \right)}^{=0} \vec{\omega}_j = \vec{0}$$

$\Rightarrow e_{nk} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$ ✗ inversibilité de E

Alors $m \geq n$ et donc $\# L \leq \# G$.

$\boxed{2^{e} \text{ cas}}$ Si $\# L = \infty$ et $\# G = n$. Alors prenons $\# L = n+1$ ✗

Th. 5.21 Dans un E.V. finidimensionnel, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

DEMO Soit B et B' deux bases d'un E.V. finidimensionnel. Comme B est libre et B' génératrice, par (5.20), $\#B \leq \#B'$.
Réciproquement, $\#B' \leq \#B$. Alors $\#B = \#B'$

Def. 5.22 Si V est un E.V. finidimensionnel, la dimension de V est le nombre n de vecteurs d'une quelconque de ses bases. On écrit

ex 5.23 (e)

$$\dim_K(V) = n$$

Si V est infinidimensionnel, on écrit : $\dim_K(V) = \infty$

Co 5.24 Soit V un espace vectoriel finidimensionnel. Soit L partie libre et G p. génératrice de V. Alors $\#L \leq \dim(V) \leq \#G$

Pro 5.25 Soit V un espace vectoriel finidimensionnel. Soit L une partie libre de V et G une partie génératrice de V.

1. $\#L = \dim(V) \Rightarrow L$ est une base de V
2. $\#G = \dim(V) \Rightarrow G$ est une base de V

DEMO 1. Par (5.19 1) $\exists B$ tq $L \subseteq B$. Comme $\#L = \dim(V) = \#B$, il suit que $L = B$ et donc L est une base.
2. Par (5.19 2) $\exists B$ tq $B \subseteq G$. Comme $\#G = \dim(V) = \#B$, il suit que $G = B$ et donc G est une base.

Pro 5.26 Soit V un E.V. et W un sous E.V. de V. Alors $\dim(W) \leq \dim(V)$. De plus, W est un E.V. finidimensionnel si V est finidimensionnel.

Demo Soit B une base dans W. Alors B est une partie libre dans V.
Par (5.24), on a $\dim W = \#B \leq \dim V$

5.4. ESPACES INFINIDIMENSIONNELS

exemple : $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Axiome 5.27 Axiome du choix : Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille d'ensemble non vide, alors le produit cartésien de cette famille d'ensemble est de nouveau non-vide : $\prod_{i \in I} S_i \neq \emptyset$

⊙ Rappel : Soit un ensemble $(T, \leq)$ partiellement ordonné si $\leq$ est une relation reflexive, transitive et antisymétrique sur T.

- Une chaine totalement ordonnée est un sous-ensemble $S \subset T$ tq $\forall x, y \in S$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.
- Un majorant pour une chaine S est un élément $t \in T$ tq $x \leq t$ $\forall x \in S$.
- Un élément $t \in T$ est appelé maximal si $\forall x \in T$, $t \leq x \Rightarrow t = x$

Le. 5.28 **Zorn.** Soit $(T, \leq)$ un ensemble non-vide partiellement ordonné, tq toute chaine totalement ordonnée possède un majorant. Alors T possède au moins un élément maximal.

Th. 5.29 Tout espace vectoriel possède une base

DEMO

- Soit V un espace vectoriel. Considérons $T := \{L \subseteq V \mid L$ est libre$\}$. Alors T est partiellement ordonnée par l'inclusion $\subseteq$ des ensemble.
- Montrons que toute chaine complètement ordonnée de T admet un majorant : soit $L' = \{L_{i \in I} \mid$ soit $L_i \subseteq L_j$ soit $L_i \supseteq L_j$ $\forall i, j \in I$ et $i \neq j\}$. ?

Considérons alors $\bigcup_{i \in I} L_i \subseteq V$. Montrons que $\bigcup_{i \in I} L_i$ est une partie libre : on suppose que $\lambda_1 \vec{v_1} + \ldots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{0}$ pour certains $\vec{v_i} \in \bigcup_{i \in I} L_i$, et $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors $\exists! L_j$ qui contient tout les $\vec{v_i}$ $\forall i = 1, .., n$ et $i \neq j$.

Alors ces $\vec{v_i}$ sont linéairements indépendants et $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

Donc on a montré que T est non vide partiellement ordonné, avec toute chaine totalement ordonnée qui possède un majorant.

- Alors par (Zorn), $\exists B \in T$ tq B est maximal et libre.
- Par l'absurde, supposons que B n'est pas génératrice. $\Rightarrow$

$\exists \vec{v} \in V$ tq $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}(B) \Rightarrow B \cup \{\vec{v}\}$ est libre $\Rightarrow B \cup \{\vec{v}\} \in T$

Or, $B \subsetneq B \cup \{\vec{v}\}$ ⚡ B maximal

Alors B est libre et génératrice $\Leftrightarrow$ B est une base

⊙ Il peut exister plusieurs éléments maximaux et donc plusieurs bases.

5.5 LE RANG D'UNE MATRICE

Def. 5.31 Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ une matrice à n ligne et m colonnes sur le corps $\mathbb{K}$.

① Le rang de colonne de A, noté $rg_{col} A$, est la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ engendré par les colonnes de A. On l'appelle l'espace des colonnes de A.

② Le rang de ligne de A, noté $rg_{lig} A$, est la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^{1\times m}$ engendré par les lignes de A. On l'appelle l'espace des lignes de A.

Le 5.33 Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Le rang de colonne de A = # max. de colonne de A linéairement indépendantes, et le rang de ligne de A = # max. de ligne de A qui sont linéairement indépendantes.

DEMO ? $rg_{col} A = \dim(\text{Vect}(a_{i1}, \dots, a_{im})) = \# B$ base de $(a_{i1}, \dots, a_{im})$.

Not. 5.34 Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ une matrice. Notons avec $A_{1-}, \dots, A_{n-}$ les matrices lignes de A et avec $A_{|1}, \dots, A_{|m}$ les matrices colonnes de A.

Obs 5.36 Considérons des matrices $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ et $M \in \mathbb{K}^{m\times 1}$.

Supposons que B soit un combili de $A_{|i_1}, \dots, A_{|i_k}$ de A (avec $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$. $\Leftrightarrow \lambda_{i_1} A_{|i_1} + \dots + \lambda_{i_k} A_{|i_k} = B$

? Et soit $m_i = \lambda_i$ si $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ et $m_i = 0$ sinon. Alors $AM = B$

De même, considérons une matrice $C \in \mathbb{K}^{1\times m}$ combili de certaines lignes de A tq $\mu_{j_1} A_{j_1-} + \dots + \mu_{j_e} A_{j_e-} = C$ et soit $N = (n_j) \in \mathbb{K}^{1\times n}$ donnée par $n_j = \mu_j$. Alors $NA = C$

Le 5.37 Soient $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ et $B \in \mathbb{K}^{m\times p}$, alors :

① $rg_{col}(AB) \leq rg_{col}(B)$

② $rg_{lig}(AB) \leq rg_{lig}(B)$

DEMO ① Il faut montrer que $\dim(\text{Vect}(\text{colonne de } AB)) \leq \dim(\text{Vect}(B_{|i}))$

Montrons que $\{(AB)_{|i_1}, \dots, (AB)_{|i_k}\}$ libre $\Rightarrow \{B_{|i_1}, \dots, B_{|i_k}\}$ libre

Soit $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$ et supposons que $(AB)_{|i_1}, \dots, (AB)_{|i_k}$ sont linéairements indépendants. Alors par (5.36), on peut écrire

$\exists M = (m_i) \in \mathbb{K}^{p\times 1}$ tq $BM = 0_{m\times 1}$ avec $m_i = 0$ $\forall i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$

On peut alors effectuer : $ABM = A0_{m\times 1} = 0_{n\times 1}$

En effet $ABM = \lambda_1 (AB)_{|i_1} + \dots + \lambda_k (AB)_{|i_k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

On a montré que chaque fois de des colonnes de (B) était libres, => les colonnes des mêmes indices de (AB) étaient libres.

(2) Prenons $C = \mathbb{K}^{1\times p}$ combili des lignes de la matrice AB. Par (5.36), $\lambda_1 (AB)_{1-} + \lambda_2 (AB)_{2-} + \dots + \lambda_n (AB)_{n-} = C$

$\exists N \in \mathbb{K}^{1\times n}$ tq $NAB = C = (NA)B$ rappel : $AB \in \mathbb{K}^{n\times p}$ et $(AB)_{i-} \in \mathbb{K}^{1\times p}$

On voit que $(NA) \in \mathbb{K}^{1\times m}$. Posons alors $N' = NA$: donc

$N'B = \sum_{i=1}^{m} \mu_i B_{i-}$. On voit que $\mathrm{Vect}\{(AB)_{1-}, \dots, (AB)_{n-}\} \subseteq \mathrm{Vect}\{B_{1-}, \dots, B_{n-}\}$

$\Rightarrow rg_{lig}(AB) \leq rg_{lig}(B)$

Le 5.38 Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ une matrice qcq et $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice inversible. Alors $rg_{col}(A) = rg_{col}(MA)$ et $rg_{lig}(A) = rg_{lig}(MA)$

DEMO (1) Par (5.37), $rg_{col}(A) \geq rg_{col}(MA)$. De plus $A = M^{-1}(MA)$.

Donc $rg_{col}(M^{-1}(MA)) \leq rg_{col}(MA) \Rightarrow rg_{col}(A) = rg_{col}(MA)$

Le 5.39 Soit A une matrice échelonnée réduite. Alors $rg_{col}(A) = rg_{lig}(A)$

DEMO Dans une matrice A sous forme E.R., toutes les lignes (ou colonnes) $\neq 0$ sont linéairement indépendants. Comme le # lignes $\neq 0$ = #col. $\neq 0$, on trouve que $rg_{col}(A) = rg_{lig}(A)$.

Th. 5.40 Pour toute matrice A, $rg_{col} = rg_{lig}$

DEMO $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, on peut trouver $E = (e_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tq $A' = EA$ est en forme echelonnée réduite. Par (5.38) et (5.39),

$$rg_{col}(A) = rg_{col}(EA) = rg_{lig}(EA) = rg_{lig}(A)$$

Def 5.41 Grace au théorème 5.40, on peut parler de Rang d'une matrice noté $rg(A)$

⊙ Par 5.39 et 5.40, on voit qu'on peut trouver le rang d'une matrice en calculant le # de ligne $\neq 0$ dans sa forme echelonnée réduite.